Induttori ed energia magnetica

Forza magnetica dall'energia

F = −∇U in assenza di oggetti (come generatori) che fanno lavoro. Altrimenti complicano il bilancio energetico e serve più " lavoro" per calcolare la stessa F.

CASO ELETTRICO

$$Q = CV \qquad U = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{F} = \frac{V^2}{2}\nabla C, \qquad \text{e.g.} \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{d}.$$

Variando la geometria in assenza di generatori, Q rimane costante mentre V varia con la geometria, quindi F vuole aumentare C (vuole ridurre la distanza d fra i piatti di un condensatore piano, infatti cariche opposte si attraggono)

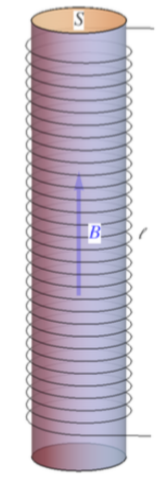
CASO MAGNETICO

$$\Phi = LI \qquad U = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{F} = \frac{I^2}{2}\nabla L} \qquad \text{e.g.} \quad L = \mu_0 N^2 \frac{S}{d}.$$

Variando la geometria in assenza di generatori e resistenze, I varia in maniera da mantenere Φ costante. Quindi F vuole aumentare L (vuole ridurre d avvicinando le spire di un solenoide, infatti correnti concordi si attraggono)

Induttori

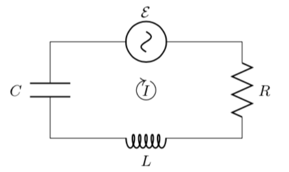
La legge di Lenz vale anche per il B che un circuito induce su se stesso. Un induttore è l'analogo magnetico di un condensatore: un dispositivo che immagazzina un B e la sua energia. L'analogo di C = Q/V è l'autoinduttanza L definita da 1/L=I/Φ_B cioè Φ_B =LI.
L'archetipo dell'induttanza è un lungo solenoide di lunghezza l ed area S«l² con N=nl»1 spire.
Il teorema di Ampere su circuito rettangolare implica che dentro B = μ_0nI è costante. L'induttanza vale L=μ_0Sln²



Circuito RLC

L'induttanza contribuisce come una batteria all'equazione di un circuito RLC

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = \mathcal{E}_R + \mathcal{E}_C \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{E} = L\dot{I} + RI + Q/C$$



$$\mathcal{E} = RI + Q/C + L\dot{I}$$

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F \qquad \text{analogo a} \qquad L\ddot{Q} = -Q/C - R\dot{Q} + \mathcal{E}$$

DUE CASI LIMITE

Carica di circuito RC: veniva $Q(t) = (CV)[1 - e^{-t/\tau}]$ con $\tau = RC$ e $U_E = Q^2/2C$.

Carica di circuito RL: si ha la stessa equazione, rimpiazzando $Q \to I$, $C \to 1/R$ e $R \to L$. La soluzione è quindi $I(t) = (V/R)[1 - e^{-t/\tau}]$ con $\tau = L/R$. Il fatto che ci voglia tempo per carica o scarica indica che l'induttanza contiene **energia magnetica** associata alla corrente I.

Energia magnetica

$$\boxed{U_B = \frac{LI^2}{2}}$$

Energia magnetica in una induttanza

$$\text{densità di energia elettromagnetica} = u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Mutua induzione

Consideriamo due circuiti. Anche se sono separati, il magnetismo li accoppia:

$$-\mathcal{E}_1 = \dot{\Phi}_1 = L_{11}\dot{I}_1 + L_{12}\dot{I}_2,$$

$$-\mathcal{E}_2 = \dot{\Phi}_2 = L_{22}\dot{I}_2 + L_{21}\dot{I}_1.$$

ENERGIA MAGNETICA DI UN CIRCUITO

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum L_{ij} I_i I_j}$$

Infatti vale: $\dot{U}_B = -W = -\sum_i \mathcal{E}_i I_i = \sum_{ij} L_{ij}\dot{I}_j I_i.$

INDUTTANZE IN SERIE E IN PARALLELO

Se M = 0 le induttanze si combinano come le resistenze: sono impedenze.

In serie dritti: $\mathcal{E}=\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2$ e $I = I_1 = I_2$ implica $L = L_1+L_2+2M$.

Solenoide: $L_i = \mu_0 S\ell_i n^2 \gg M$, $\ell = \ell_1 + \ell_2$.

In serie a rovescio: $\mathcal{E}=\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2$ e $I = I_1 = -I_2$ implica $L=L_1+L_2-2M$.
$L > 0$ implica $M < (L_1+L_2)/2$.

In parallelo dritti $\mathcal{E}=\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_2$ e quindi

$$\dot{I}_1 = -\mathcal{E}\frac{L_2 - M}{L_1 L_2 - M^2}, \qquad \dot{I}_2 = -\mathcal{E}\frac{L_1 - M}{L_1 L_2 - M^2}$$

$$-\mathcal{E} \equiv L\dot{I} = L(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) \qquad \boxed{L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}}$$

$\boxed{M < \sqrt{L_1 L_2}}$, che è una condizione più stringente.

In parallelo a rovescio: $L = (L_1L_2 - M^2)/(L_1+L_2+2M)$.